Introducción

La teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que intentan describir el comportamiento de sistemas de líneas de espera particulares o de sistemas de colas. Los modelos nos sirven para evaluar y encontrar soluciones de compromiso entre la frecuencia de llegada de elementos, así como el número de servicios para procesar dichos elementos de una manera eficiente.

Esta teoría es muy utilizada en muchos aspectos de la vida cotidiana, apertura de cajas en un supermercado, evaluar el tráfico en las calles, evaluar la eficiencia en un restaurante, e incluso en teoría de comunicaciones tanto a nivel de numero de enlaces de una central telefónica o simular el flujo de tráfico en una red de paquetes.

Por tanto, los objetivos de esta primera práctica serán los siguientes:

- **Ejercicio 1**: Familiarización con los conceptos de teoría de colas y la demostración empírica del teorema de Little basándonos en un modelo sencillo M/M/1. Ejercicio obligatorio 7 puntos
- **Ejercicio 2**: Estudio del modelo matemático de colas sobre un entorno real. Distribuciones de llegada de peticiones Web, y análisis estadístico de las mismas. Ejercicio: 3 puntos.

Ejercicio 1

Se realizará un programa en C que simulará la llegada de elementos discretos a una cola M/M/1 (similar a la mostrada en la Figura 1), y calculará para cada uno de ellos el tiempo medio de estancia **W**, tiempo medio de proceso **Ts,** así como el número medio de elementos en el sistema **L** para cada instante de tiempo.

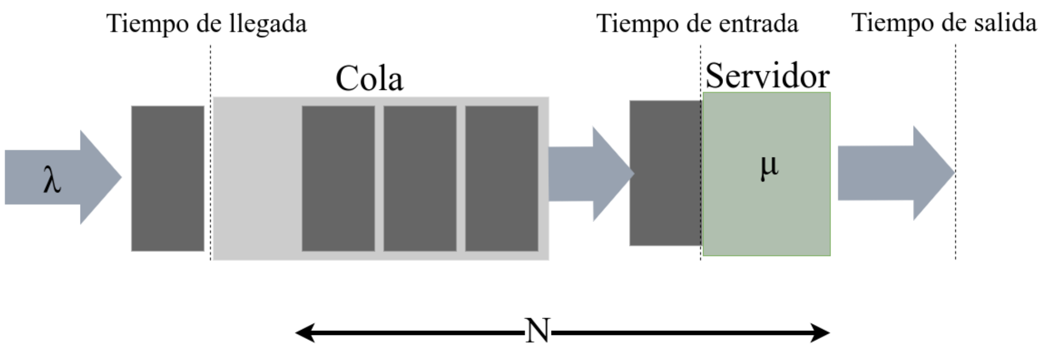

Figura 1: Diagrama Sistema M/M/I

Para ello el programa pedirá al usuario 3 parámetros:

- Tasa Media de Llegada (λ)
- Tasa Media de Proceso (μ)
- Número de Iteraciones.

Con estos tres parámetros el programa deberá generar un fichero de tantas iteraciones como se haya indicado con los siguientes capos separados por el carácter ";" como se muestra a continuación:

Tiempo Llegada Acumulado	;	Tiempo de Proceso	;	Tiempo de Entrada	;	Tiempo de salida	;	N	;	T

Este formato se conoce comúnmente como fichero CSV (*comma separated values*)

Donde:

- **Tiempo Llegada Acumulado.** Es el tiempo en el que el elemento llega al sistema. Al tratarse de un M/M/1, el tiempo entre llegadas es un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial. Para obtener una probabilidad exponencial a partir de un número aleatorio uniforme en el intervalo [0, 1] podemos utilizar el método de la transformada inversa: si X es uniforme en [0, 1], $\mathbf{Y = -ln(1-X) / \lambda}$ es exponencial de parámetro λ.
- **Tiempo de Proceso.** Es el tiempo en el que el elemento es procesado en el servidor. Se distribuye según una distribución exponencial.
- **Tiempo de Entrada.** Tiempo en el que el elemento entra a procesarse en el servidor. Valor calculado
- **Tiempo de Salida.** Tiempo en el que el elemento sale del sistema. Valor calculado
- **N.** Número de elementos en el sistema cuando llega el elemento procesado. Valor calculado
- **T.** Tiempo de estancia en el sistema. Valor calculado.

A continuación, se muestra una posible salida del programa:

```
#Llegada_Acumulada;Tiempo_Servicio;Tiempo_entrada;Tiempo_salida;Elementos_Sistema;Tiempo_Sist
ema
0.366751;0.167169;0.366751;0.533920;0;0.167169
0.672414;0.533889;0.672414;1.206304;0;0.533889
1.157698;0.073362;1.206304;1.279666;1;0.121968
1.239359;0.487336;1.279666;1.767002;1;0.527643
1.304442;0.269123;1.767002;2.036125;1;0.731683
1.434229;0.330402;2.036125;2.366527;2;0.932298
1.524987;0.240105;2.366527;2.606632;3;1.081645
2.133258;0.826421;2.606632;3.433053;2;1.299796
```

Al final de todas las iteraciones el **programa deberá calcular** los siguientes parámetros e **imprimirlos por `stderr`**:

- **L (E[N]):** Cálculo de L como media de N a partir de los valores obtenidos (cálculo empírico).
- **$L_{Little}= \lambda \cdot W$:** Cálculo de L a partir de la fórmula del teorema de Little (cálculo teórico).
- **$L_{teórico}$ (L_t): $L_t= \lambda / (\mu - \lambda)$.** Cálculo de L a partir de la fórmula teórica.
- **W (E[T]):** Cálculo de W como media de T a partir de los valores obtenidos. (Cálculo empírico)
- **$W_{teórico}$ (W_t): $W_t=1/ (\mu - \lambda)$.** Cálculo de W a partir de la fórmula teórica.
- **$\rho = \lambda / \mu$**

Se realizarán simulaciones para distintos valores de λ y μ.

a) Manteniendo λ Fijo (2), simulaciones con μ= {1, 3, 5, 7, 9}.
b) Manteniendo μ Fijo (6), simulaciones con λ = {1, 2, 4, 6}.

Cuestiones Teóricas

- Ej. 1.1. (1p) Selecciona, de entre las combinaciones de la simulación (a), un par de valores de λ y μ que sean adecuados y realiza distintas simulaciones variando el número de iteraciones. ¿A partir de que iteración convergen los resultados teóricos con los prácticos? ¿Qué condición es necesaria sobre λ y μ para que converjan todos los parámetros?
- Ej. 1.2. (1p) A partir de los datos de la simulación (a), representa los valores de L frente a los valores de W en una gráfica. Comprueba que siguen una relación lineal según el Teorema de Little: $L_{Little}= \lambda \cdot W$. ¿Se cumple en todos los casos? Justifica por qué.
- Ej. 1.3. (1p) A partir de los datos de la simulación (b) crea una estimación de la función de distribución[1] de los tiempos entre llegadas de la simulación. ¿A qué distribución se asemejan? Se deben utilizar las herramientas informáticas necesarias para contestar esta cuestión (p.ej., Matlab).
- Ej. 1.4 (1p). A partir de los datos de la simulación (a), representa la estimación de la función de distribución del tiempo de servicio. Comparar con la curva teórica.
- Ej. 1.5. (1p) A partir de la simulación (b), obtenga la probabilidad de que no haya elementos en el sistema (número de veces que frente al total) y compárela con ρ.

[1] También se conoce como ECDF

Ejercicio 2

En este ejercicio se estudiará la salida de un registro o log de un servidor Web para analizar los tiempos entre llegadas de peticiones, así como los tamaños de los recursos que se sirven. Para ello trataremos de encontrar los modelos matemáticos por los cuales se rigen estas dos magnitudes.

El fichero de log a analizar se generará para cada pareja de cada turno. Para ello se hará uso de la utilidad de generación subida a Moodle. Este programa recibe 3 argumentos:

- -p Número de pareja. Debe ser un número entero
- -t Turno. Una letra que se corresponde con el día del turno de los alumnos (X, J, V)
- -o Fichero de salida: nombre del fichero de salida que se generará

Por ejemplo, la pareja 10 del turno del miércoles debe ejecutar el programa de la siguiente manera:

```
> python generate.pyc -p 10 –t X –o salidaX10.txt
```

Este programa generará un log similar a los que se pueden encontrar en los servidores de web Apache. Este fichero contiene los siguientes campos:

- IP o nombre de dominio del cliente que ha realizado la petición
- Tiempo de la petición en formato Unix
- Método, recurso y versión de la petición
- Código de respuesta HTTP
- Tamaño en bytes del recurso servido

El ejercicio consiste en diseñar e implementar una utilidad que permita extraer de esos ficheros de log los parámetros de tiempo entre llegadas de peticiones y tamaño de los recursos servidos. La salida del fichero deberá ser un fichero CSV (*comma separated values*) que contenga una línea por cada recurso que aparezca en el fichero de log y tres columnas:

- Tiempo de llegada de la petición
- Diferencia de tiempo con la anterior petición
- Tamaño del recurso en bytes

La implementación podrá ser en el lenguaje de elección del alumno (C, Java, Python, Matlab…).

En nuestro caso analizaremos el tiempo entre peticiones y los tamaños. A partir de estos datos se deben obtener:

- ECDF del tiempo entre peticiones
- ECDF del tamaño de los recursos

Estudiar dichos ECDF para establecer posibles similitudes con distribuciones de probabilidad e indicar razonadamente bajo qué distribuciones se pueden modelar los tiempos y tamaños. Se deben estimar (si es posible) los parámetros de las distribuciones.

Cuestiones Teóricas

- Ej. 2.1. (1p) Representa los ECDF de entre peticiones y tamaño de los recursos.
- Ej. 2.2.- (2p) Indica razonadamente a qué distribución se asemejan dichos ECDF e intentar estimar sus parámetros. ¿Qué modelo de colas usaría para el sistema estudiado?

Documentación a Entregar

- Programa simulador completo (codificado en C e incluyendo todos los archivos necesarios para compilarlo y ejecutarlo) y las utilidades desarrolladas para responder a los ejercicios.
- Memoria de la práctica. Esta memoria ha de incluir las respuestas y gráficas de las cuestiones teóricas comentadas anteriormente.
- Memoria, programa y listados se entregarán vía Moodle según el procedimiento establecido en la normativa de prácticas

Criterios de evaluación

- Ej. 1: Realizar ejercicio de simulación: 2 p
- Ej. 1: Responder Cuestiones ejercicio 1: 5 p
- Ej. 2: Análisis y respuesta a las Cuestiones ejercicio 2: 3p

Apéndice: creación de ECDF

Para caracterizar las variables aleatorias que se mencionan en la práctica, es posible utilizar histogramas, funciones de densidad o funciones de distribución. En este apéndice se detalla qué es una ECDF.

La ECDF (*Empirical Cumulative Distribution Function*) es una aproximación empírica a la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria. En nuestro caso, vamos a determinar la ECDF mediante un conjunto de puntos que luego representaremos mediante un gráfico de líneas que une dichos puntos. Un método para obtener la ECDF es el siguiente:

1. Primero definiremos un rango de valores en los que está definida dicha función: para los ejercicios en cuestión, este rango empezará en 0 y terminará en el entero más próximo al máximo valor de la simulación. Consideraremos un rango de 10 puntos,

espaciados linealmente, con lo que el rango de valores a considerar será $\{X_0, X_1, \ldots, X_9\}$, donde $X_0=0$, X_9=valor máximo y $X_n-X_{n-1} =(X_9-X_0)/10$

2. Con los valores empíricos de la simulación prepararemos una lista de 10 valores F_n (con n entre 1 y 10), cada uno asociado al X_n correspondiente. Esta lista se construye de la siguiente manera: F_n=[Número de valores de la simulación <=X_n]/[Número total de elementos en la simulación]
3. Por último, construir una gráfica lineal que relacione F_n con X_n.

La selección de 10 puntos espaciados linealmente es arbitraria: podría haberse elegido otro número de puntos, o una distribución de valores X_n no espaciada linealmente (el método de construcción sería el mismo, en cualquier caso).

A modo de ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente simulación para el tiempo de proceso con distribución exponencial y media 5:

4,01963613
19,546498
4,53366552
0,44993381
4,21488883
8,60814586
0,55173237
7,00914365
6,72773021
2,30306271
2,08220278
1,09256792
0,58571777
2,21997147
38,2119191
1,44141882
26,5436572
13,6001277
3,44047809
0,2011346
11,9417513
2,05299414
1,93432
1,48293483
17,7849611
2,03338957
3,02167409
0,72393726
7,31062468
2,0534105

En este experimento, los valores X_n y F_n serían como siguen (se ha añadido por claridad N_n que es N_n=[Número de valores de la simulación <=X_n]:

X_n	N_n	F_n
0	0	0
3,8	17	0,56666667
7,6	23	0,76666667
11,4	24	0,8
15,2	26	0,86666667
19	27	0,9
22,8	28	0,93333333
26,6	29	0,96666667
30,4	29	0,96666667
38	29	0,96666667

La representación gráfica quedaría: